На правах рукописи

Аль Имам Адель А Абед Аль Вахаб

Математическое и компьютерное моделирование особенностей продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в каналах различного поперечного сечения

Специальность 05.13.18 “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ”

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж 2015

Работа выполнена в Воронежском государственном университете.

Научный руководитель: доктор техничееких наук, профессор
Вервейко Николай Дмитриевич

Официальные оппоненты: Сумин Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, ВУНЦ ВВС "Военно-воздушная академия имени професора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", кафедра математики, заведующий.

Зеленев Вячеслав Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО "Воронежский государственный педагогический университет", кафедра технических и естественно-научных дисциплин, заведующий.

Ведущая организация: ООО ФПК “Космос-Нефть-Газ”

Защита состоится «13» мая 2015 года в 15.10 часов на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 при Воронежском государственном университете, адрес: 394006 г. Воронеж, Университетская пл.1, ауд. 333.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета и на сайте http://www.science.vsu.ru.

Автореферат разослан «__» марта 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Шабров Сергей Александрович

Актуальность темы диссертации обусловлена недостаточной адекватностью известных математических моделей, описывающих течение и деформирование материалов с микроструктурой. Это объясняется сложным влиянием микроструктуры материалов, обладающих вязкими и пластическими свойствами, на их течение и деформирование вблизи гладких и различной степени шероховатости поверхностей. Микроструктура материала слабо проявляется в областях течения с малыми градиентами скоростей, однако в местах больших градиентов скоростей свойства микроструктуры проявляются существенным образом, что влияет на весь характер течения, изменяя его качественно [29, 150, 148, 121, 122, 164].

Существенной трудностью использования течения материалов с микроструктурой является построение самой математической модели, которая описывала бы особенности реальных явлений. В настоящее время известно несколько подходов.

Одной из первых в истории является модель Коссера (1909г.), в которой, кроме перемещения элементов среды, вводится еще и микровращение как дополнительная кинематическая характеристика,

В 60-е годы прошлого века Эринген предложил и развил теорию микроструктурных материалов, введя в рассмотрение микроперемещение и микровихрь, что значительно усложнило математическую модель.

В последнее время эти два направления активно разрабатывались российскими и зарубежными исследователями (Кунин И.А., Койтер В.Т., Миндлин Р.Д., Елизарова Т.Г., Аэро Э.Л., Четвертушкин Б.Н., Быковцев Г.И. и др.). Одно из перспективных направлений моделирования течения микроструктурных материалов связано с уточнением деформационных характеристик представительных элементов $\overline{\Delta\nabla} = h^3$ [167, 171, 172, 174, 175], приводящих математические модели исследуемых явлений к системам уравнений в частных производных сингуляторного типа (Вервейко Н.Д., Просветов В.И.) [80,81,141]. Проблемам, связанным с условиями на границах перехода материала из деформируемого состояния в недеформируемое, абсолютно твердое, посвящены работы Г.Н. Быковцева, А.А. Буренина, В.И. Ряжских, А. Д. Чернышова [18,113] и др. Одним из эффективных методов решения сингулярно возмущенных задач является метод возмущений (малого параметра), который успешно разрабатывался в последнее время (Дж. Коул, А.Х. Найфе, В.Г. Задорожный и др.) и широко использовался в решении задач течения и деформирования материалов (Д.Д. Ивлев, А.Н. Спорыхин, М.А. Артёмов и др.).

Предлагаемая диссертационная работа посвящена моделированию течения вязкопластических микроструктурных материалов методом возмущений и является продолжением научных исследований российских и зарубежных ученых, выполнена на кафедре механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета в рамках темы «Разработка математических моделей и эффективных аналитических и численных методов решения статических и динамических задач механики

деформируемых сложных сред с микроструктурой» (код по ГАСТНТИ 30.19.23.30.19.29).

Цель и задачи исследования. Целью диссертационного исследования является разработка математической и компьютерной моделей течения микроструктурного вязкопластического материала с учетом дополнительных граничных условий и построение алгоритма расчета поля скоростей одномерного течения как инструмента математического моделирования с использованием ЭВМ.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Построение математической модели течения исследуемого материала с учетом условий на внешней границе области течения и на поверхности затвердевания материала. 2. Построение аналитических выражений для моделирования на ЭВМ поля скоростей течения микроструктурного вязкопластического материала в трубах круглого и эллиптического поперечных сечений. 3. Разработка вычислительного алгоритма моделирования поля скоростей течения исследуемого материала в цилиндрическом зазоре. 4. Разработка программного комплекса моделирования течения МВПМ в цилиндрическом зазоре. 5. моделирования дискретного заполнения молекулами углеродных нанотрубок распределенным полем скоростей течения микроструктурного материала.

Область исследования. Областью исследований диссертации является: 1) разработка и формулировка замкнутой математической модели течения микроструктурных вязкопластических материалов с выделением различных видов граничных условий в зависимости от материальной природы деформируемого материала и свойств ограничивающей поверхности;

2) развитие качественных и приближённых аналитических методов анализа сложных математических моделей течения и деформирования микроструктурных вязкопластических материалов; 3) разработка и тестирование вычислитель методов с использованием современных компьютерных технологий. Пункты 2), 3) соответствуют формуле специальности 05.13.18.

Методы исследования. Проведенные в данной диссертационной работе исследования основаны: на классических законах построения математических моделей течения и деформирования сложных сред, методах аналитического исследования сингулярно возмущенных уравнений в частных производных, методе малого параметра, использования языков программирования элементов стандартного программного обеспечения ЭВМ.

Основные положения и результаты работы, выносимые на защиту.

1. Математическая модель течения микроструктурного вязкопластического материала на неподвижных и подвижных криволинейных поверхностях с учетом граничных условий. 2. Алгоритм расчета поля скоростей течения исследуемого материала в трубе эллиптического сечения с точностью до величин 1-го порядка по малым величинам математической модели. 3. Алгоритм расчета поля скоростей

течения в цилиндрическом зазоре. 4. Программный комплекс моделирования течения МВПМ в цилиндрическом зазоре путем реализации МКЭ с нелинейными базисными функциями. 5. Математическая модель и алгоритм расчета заполнения молекулами внутренней полости углеродной нанотрубки.

Научная новизна.

1. Построены условия на границах области течения и на поверхности раздела материала на область течения и на недеформируемую часть с учетом малых величин, характеризующих микроструктуру материала.

2. Построены аналитические выражения для моделирования скорости течения и границы твердой части материала с учетом величин первого порядка относительного характерного параметра микроструктуры в случаях:

2.1. продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в трубе эллиптического поперечного сечения;

2.2. продольного течения материала в цилиндрическом зазоре.

3. Программный комплекс моделирования течения МВПМ в цилиндрическом зазоре путем реализации МКЭ с нелинейными базисными функциями.

4. Построена математическая модель послойного течения микроструктурного вязкопластического материала в круглой трубе под действием сил поверхностного натяжения, что моделирует заполнение углеродных нанотрубок молекулами. Численно подтвержден факт более быстрого движения молекул заполнителя у стенки нанотрубки по сравнению с серединой нанотрубки.

Практическая ценность. Предложенная в диссертации уточненная математическая модель программного комплекса расчета течения микроструктурного вязкопластического материала позволяют моделировать параметры течения многих реальных технических материалов с наполнителями и биологических растворов с целью использования полученных данных при конструировании технологического оборудования и приборов. Изложенный в диссертации материал по применению метода малого параметра может служить частью спецкурсов по построению математических моделей реальных процессов.

Апробация. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры теоретической и прикладной механики факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского госуниверситета; на VII международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж 26-28 ноября 2012г.; на международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж, 12-14 декабря 2013г.; на VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела, 16-21 июня 2014г. (Чебоксары); на IX Международной научно-практической конференции «Инновации в науке: применение и результаты» (Россия, г. Новосибирск, 17-

18 октября 2014г.); Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна, Воронеж, 26 января – 1 февраля 2014г.

Достоверность полученных в диссертации научных результатов обеспечивается использованием: фундаментальных положений теории математического моделирования и механики сплошных сред, теории дифференциальных уравнений, методов теории регулярных и сингулярных возмущений, численных методов решения дифференциальных задач, апробированных языков программирования и программ математического обеспечения ЭВМ. Правильность построенной математической модели и ее результатов подтверждается также совпадением ее с классической при предельном переходе при стремлении возмущений за счет микроструктуры к нулю.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 печатных работ, из них 3 - в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

Личный вклад автора. Работы [4, 6, 7, 10, 11] выполнены автором самостоятельно. В работах [1, 2, 3, 5, 8, 9, 12] автор участвовал в постановках задач, разработке математических моделей и алгоритмов решения, выполнял все необходимые вычислительные, программистские работы и построение графического сопровождения.

Содержание работы

Во введении дан краткий исторический обзор отечественных и зарубежных исследований по математическому моделированию течения и деформирования материалов сложной структуры, обладающих набором таких механических свойств как вязкость, пластичность, микроструктура. Приведен анализ существующих подходов к математическому моделированию, самих математических моделей и методов решения возникших сингулярно возмущенных задач. Обоснована актуальность темы, сформулирована цель работы, выявлены научная новизна и основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе диссертации изложены общие принципы построения замкнутых математических моделей механического поведения реологически сложных материалов, которые состоят в выполнении законов сохранения: массы, количества движения и момента количества движения – для представительного объема $\Delta V = h^3$.

Для микроструктурных материалов учет характерного параметра δ приводит классические уравнения механики сплошных сред в безмоментном приближении к виду:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \delta^2 \Delta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)\right) = 0 \ ; \qquad (1)$$

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \delta^2 \Delta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + g_i \quad ; \quad (i = 1,2,3) \qquad (2)$$

здесь: v_i – скорость, σ_{ij} – напряжения, $\delta = h/L$; ρ – плотность, $\Delta = \partial^2/\partial x_k \partial x_k$ – оператор Лапласа.

Реологические уравнения микроструктурного вязкопластического материала состоят: a) в линейной связи напряжений со скоростями деформаций

$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}'$; $p = -(1/3)\sigma_{kk}$, μ – коэффициент вязкости ; (3)

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\ c} + \delta^2 \Delta\varepsilon_{ij}^{\ c}$;

$\varepsilon_{ij}^{\ c} = (1/2)(v_{i,j} + v_{j,i})$; – скорость деформации Коши (4)

b) в выполнении условия пластичности Мизеса

$\sigma_{ij}'\sigma_{ij}' \geq 2K^2$; $\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{kk}\delta ij$. (5)

Система уравнений в частных производных для: ρ, σ_{ij}, ε_{ij}, v_i может быть сведена к уравнениям в частных производных 4-го порядка для скорости v_i , является нелинейной с неизвестной границей $\check{\Gamma}$ области затвердевания материала где $\sigma_{ij}'\sigma_{ij}' = 2K^2$.

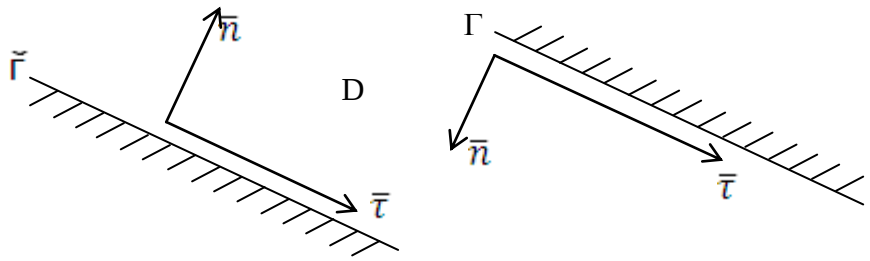


Рис. 1. Изображение области течения материала с внешней заданной границей Γ и неизвестной заранее границей области затвердевания

Граничные условия на заданной внешней границе Γ можно задавать в зависимости от свойств поверхности

На идеально гладкой Γ: $\partial v_\tau/\partial n = 0$; (6)

На шероховатой: $v_\tau = v_0 \cos\alpha$; $v_n = v_0 \sin\alpha$. (7)

На поверхности $\check{\Gamma}$ предельного состояния материала $\sigma_{n\tau} = K\sqrt{2}$ условие для скорости имеет вид

$$\varepsilon_{n\tau}^{\ c}\Big|_{\check{\Gamma}} + \delta^2\left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\varepsilon_{n\tau}\Big|_{\check{\Gamma}} = 0. \quad (8)$$

Система (1-8) задает математическую модель течения микроструктурного вязкопластического материала.

Предложенная в диссертации математическая модель (1-8) течения МВПМ отличается от ранее предложенных моделей учетом характерного линейного параметра микроструктуры δ : в уравнениях движения и

неразрывности (1-2); в определении скорости деформации (4); в уравнении нахождения границы твердой зоны (8).

Простое течение микроструктурного вязкопластического материала в плоской трубе под действием постоянного перепада давления $\partial p/\partial x = -q^2$ (рис 2) описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением 4-го порядка с постоянными коэффициентами с малым параметром δ при старшей производной с граничными условиями

$$\delta^2 w^{IV} + w'' = -q^2;$$

$$w(H) = 0 \ ; \ w(H) - \gamma w'(H) = 0; \qquad (9)$$

$$w'(\check{H}) = 0 \ ; \quad \check{H} = K/2q^2 .$$

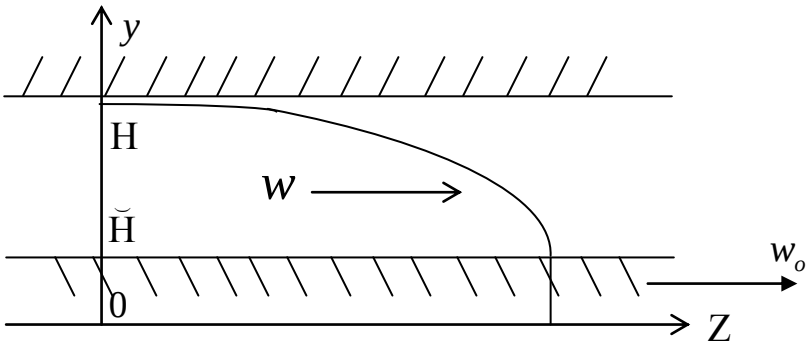


Рис.2. Схематическое изображение течения в плоской трубе с твердым ядром

Распределение скорости $w(x)$ в области течения, как решение задачи (9), имеет вид:

$$\lambda(x) = \frac{w(x)}{\left(H^2 \dfrac{q^2}{2}\right)} = 1 - x^2 + \frac{\delta}{\sin\dfrac{1-\nu}{\delta}}\left[\nu\left(\cos\frac{1-x}{\delta} - 1\right) + \cos\frac{1-\nu}{\delta} - \cos\frac{\nu - x}{\delta}\right]. \qquad (10)$$

$$\lambda_0 = \frac{w(\check{H})}{\left(H^2 \dfrac{q^2}{2}\right)} = 1 - \nu^2 + \frac{\delta}{\sin\dfrac{1-\nu}{\delta}}\left(\cos\frac{1-\nu}{\delta} - 1\right); \quad x = y/H; \ \nu = \check{H}/H . \qquad (11)$$

Из (10,11) следует, что параметр δ дает возмущение скорости течения на величину порядка δ.

из графика (Рис. 3) для скорости течения $v(x)$ следует слоистость течения, которая увеличивается с ростом параметра δ.При $\delta \to 0$ слоистость исчезает, что соответствует переходу в модель вязкого течения.

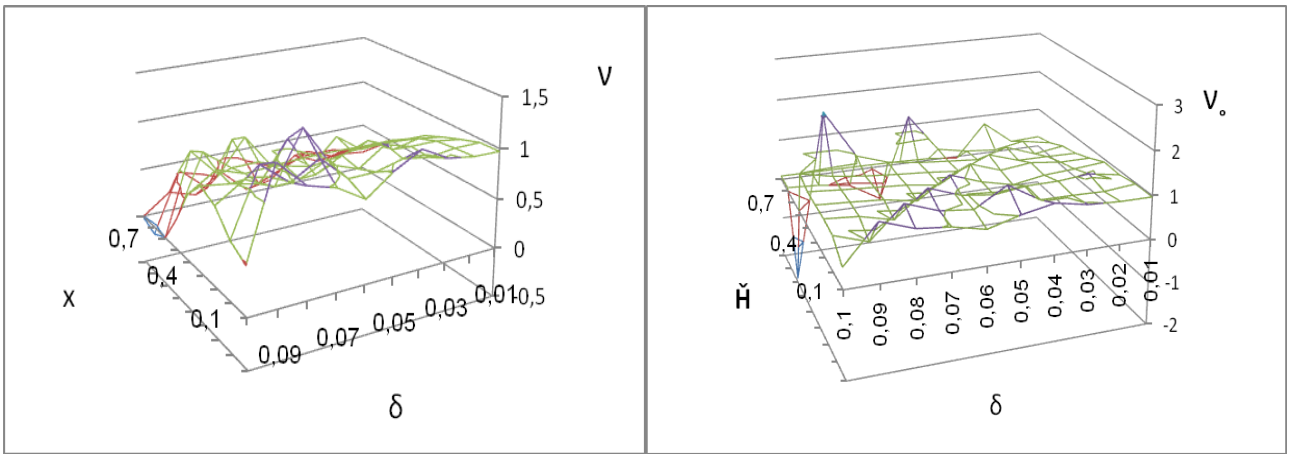


Рис.3. Графики безразмерных относительных скоростей: $v(x)-$ как функции x и; $v(0)-$ как функции δ и $\breve{H}$

Вторая глава диссертации содержит алгоритм расчета скорости течения и исследование стационарного течения микроструктурного вязкопластического материала в трубопроводе эллиптического поперечного сечения под действием постоянного перепада давления вдоль трубы (Рис.4).

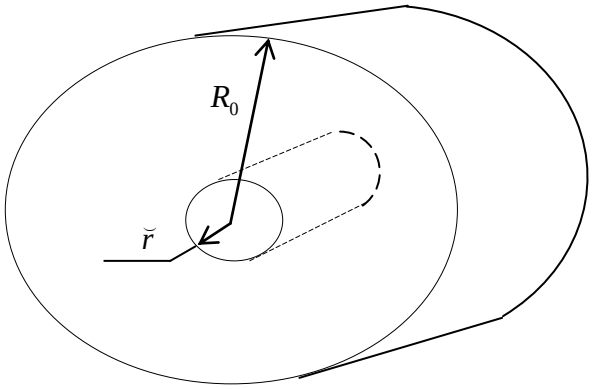


Рис.4. Изображение прямолинейного элемента трубы эллиптического поперечного сечения

В цилиндрической системе координат (r,θ,z) уравнение (1) для продольной компоненты скорости $w(r,\theta)$ принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\frac{\delta^2}{12}\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)+\frac{1}{\xi}\frac{\partial^3 w}{\partial \xi\,\partial \theta^2}\right]\right\}+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}+$$
$$\frac{\delta^2}{12}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right)+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}\right]\right\}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{\delta^2}{12}\frac{1}{\xi^3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)+\frac{1}{\xi}\frac{\partial^3 w}{\partial \xi\,\partial \theta^2}\right]=-q^2 \qquad (12)$$

где: $\xi=r/R_0$; $\quad q^2=-\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial P}{\partial z}\dfrac{R_0^{\,2}}{V_0}$; R_0, V_0- характерные радиус и скорость.

Уравнение неразрывности $\partial w/\partial z=0$ удовлетворяется тождественно.

Зададим внешнюю границу трубы в виде эллипса

$$x=a\cos t;\, y=b\sin t \quad . \qquad (13)$$

В полярных координатах (r,θ) уравнение (13) запишем в форме

$$r^2 = \frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}; \qquad \left(\varepsilon^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} \quad при \;\; a>b\right). \tag{14}$$

Безразмерный вид (14) будет

$$\xi^2 = \frac{1}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}; \qquad \xi = 1+\frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2\theta+\ldots \quad . \tag{15}$$

Решение задачи (12) в области с границей (15) представимо в виде степенного ряда по двум параметрам δ^2 и ε^2.

$$w(\xi,\theta,\delta,\varepsilon) = w^0(\xi,\theta,0,0) + w^\delta(\xi,\theta)\cdot\delta^2 + w^\varepsilon(\xi,\theta)\cdot\varepsilon^2+\ldots \tag{16}$$

которое носит наименование «внешнее разложение».

Подстановка выражения для скорости w в виде ряда (16) в уравнение (12) позволяет выделить уравнения для членов ряда (16)

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w^0}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 w^0}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial w^0}{\partial\xi} = -q^2;\\ \frac{\partial^2 w^\delta}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 w^\delta}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial^2 w^\delta}{\partial\xi} = P^\delta; \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\xi} = 0\end{gathered} \tag{17}$$

где: $P^\delta = P^\delta(w^0(\xi,\theta))$ - вычисляется по приближению нулевого порядка w^0.

Условие прилипания материала к стенке примет вид для приближений

$$w^0\Big|_{\xi=1} = V; w^\delta\Big|_{\xi=1} = V; w^\varepsilon\Big|_{\xi=1} = \frac{\partial w^0}{\partial\xi}\Big|_{\xi=1}\cdot\frac{1}{2}Cos^2\theta. \tag{18}$$

Условие качение представительного элемента вдоль границы трубы с возможным скольжением

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial w}{\partial n}-\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\right)\Bigg|_{\check{\Gamma}} = 0; \left(\frac{\partial w^0}{\partial\xi}-\gamma\frac{\partial^2 w^0}{\partial\xi^2}\right)\Bigg|_{\xi=1} = 0; \left(\frac{\partial w^\delta}{\partial\xi}-\gamma\frac{\partial^2 w^\delta}{\partial\xi^2}\right)\Bigg|_{\xi=1} = 0;\\ \left(\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\xi}-\gamma\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial\xi^2}\right)\Bigg|_{\xi=1} = -\left(\frac{\partial w^0}{\partial\xi}-\gamma\frac{\partial^2 w^0}{\partial\xi^2}\right)\Bigg|_{\xi=1}\cdot\frac{1}{2}Cos^2\theta.\end{gathered} \tag{19}$$

При большом сцеплении микроструктурного вязкопластического материала со стенками шероховатой трубы возможно прилипание представительного элемента и его качение без проскальзывания

$$\begin{gathered}\left(w-\gamma\frac{\partial w}{\partial n}\right)\Bigg|_{\check{\Gamma}} = 0; \left(w^0-\gamma\frac{\partial w^0}{\partial\xi}\right)\Bigg|_{\xi=1} = 0; \left(w^\delta-\gamma\frac{\partial w^\delta}{\partial\xi}\right)\Bigg|_{\check{\Gamma}} = 0;\\ \left(w^\varepsilon-\gamma\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\xi}\right)\Bigg|_{\xi=1} = -\left(w^0-\gamma\frac{\partial w^0}{\partial\xi}\right)\Bigg|_{\xi=1}\cdot\frac{1}{2}Cos^2\theta.\end{gathered} \tag{20}$$

На границе $\check{\Gamma}$ ядра течения приведем условие непрерывной скорости $\partial w/\partial n\big|_{\check{\xi}_0} = 0$, которые для приближений дают

$$\partial w^0/\partial\xi\big|_{\check{\xi}_0} = 0;\; \partial w^\delta/\partial\xi\big|_{\check{\xi}_0} = 0;\; \partial w^\varepsilon/\partial\xi\big|_{\check{\xi}_0} = 0. \tag{21}$$

Условие баланса сил на элементе твердого ядра течения позволяет найти границу ядра в нулевом приближении

$$\pi\,\check{\xi}^2\cdot\partial p/\partial z = 2\pi\,\check{\xi}\cdot K;\ \check{\xi}_0 = 2K/\partial p/\partial z. \qquad (22)$$

Уравнения (17) для слагаемых w^0, w^δ, w^ε внешнего уравнения (16) представляют собой уравнения в частных производных 2-го порядка с избыточным количеством граничных условий, часть из которых выполнить невозможно и их надо отнести к решению в пограничном слое.

В случае граничного условия прилипания к внешней границе $\xi = 1$ скорость течения $w^0(\xi)$ находится из (17)

$$w^0(\xi)\Big/q^z/4 = 1-\xi^2 + 8\left(\frac{K_0}{\partial p/\partial z}\right)^2 \ln\xi^0,\ \xi\in[\check{\xi};1]. \qquad (23)$$

В случае качения элемента ΔV материала вдоль стенки трубы $(w(1)-\gamma w'(1)=0)$ развитое течение допускает слабое проскальзывание на стенке $w^0(1)$ (Рис. 5 в)

$$w^0(\xi)\Big/q^2/n = 1-\xi^2 + 2\gamma\left(1-\check{\xi}^2\right) + 2\check{\xi}^2\ln\xi. \qquad w^0(1)\Big/q^2/n = 2\gamma\left(1-\check{\xi}^2\right). \qquad (24)$$

Для расчета течения в пограничном слое в работе проведено растяжение координаты $\eta = (\xi-1)\Big/\sqrt{\delta}$. Дифференциальное уравнение для $w(\eta)$ имеет вид

$$d^2w\Big/d\eta^2 = 0 \qquad (25)$$

и само распределение скорости в пограничном слое имеет линейный вид

$$w(\eta) = w^0(1)\cdot\eta\Big/\eta_0, \qquad (26)$$

где η_0 - толщина пограничного слоя.

Более сильное растяжение координаты ξ $\quad \xi' = \dfrac{\xi-1}{\delta}$ (27)

приводит дифференциальное уравнение для $w(\xi)$ к виду

$$\frac{1}{12}\frac{d^n w}{d\xi'^2} + \frac{d^2 w}{d\xi'^2} = 0, \qquad (28)$$

так что $\quad w(\xi') = w^0(1)\cdot\sin\sqrt{12}\xi'\big/\sin\sqrt{12}\xi'_0,$ (29)

где ξ_0 - толщина пограничного слоя, $w^0(1)$ - скорость скольжения материала вдоль стенки трубы.

В третьей главе диссертации исследуются возможные варианты течения МВПМ в кольцевом зазоре (Рис. 4) при условии полного прилипания к стенкам и при условии возможного скольжения вдоль стенки трубы.

Дифференциальное уравнение продольного осесимметричного движения МВПМ следует из (12) при условии $\partial w / \partial\theta = 0$

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{\delta^2}{12}\frac{d}{d\xi}\left\{\frac{1}{\xi}\left[\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d^2 w}{d\xi^2}\right)\right]\right\} + \frac{1}{\xi}\frac{dw}{d\xi} + \frac{\delta^2}{12}\frac{1}{\xi^3}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d^2 w}{d\xi^2}\right) = -q^2 \qquad (30)$$

здесь: $\xi = r / R_0$; $q^2 = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{R_0^2}{V_0}$.

Примем в качестве граничных условий: 1) прилипание элемента МВПМ к стенкам и условие проскальзывания

$$w\big|_{\Gamma} = 0; \left(\frac{dw}{d\xi} - \gamma\frac{d^2 w}{d\xi^2}\right)\Bigg|_{\Gamma} = 0, \qquad (31)$$

2) непрерывность скорости течения на границе застойной зоны

$$w\big|_{\check{\Gamma}} = 0;\ dw/d\xi\big|_{\check{\Gamma}} = 0. \qquad (32)$$

В нулевом приближении разложения скорости $w(\xi,\delta)$ в степенной ряд

$$w^0(\xi) = -q^2/4 \cdot \xi^2 + C_1 \ln\xi + C_2. \qquad (33)$$

Течение материала происходит в области у внешней границы зазора (Рис. 8) со скоростью (34)

$$w^0(\xi)/q^2/4 = 1 - \xi^2 - \left(1 - \check{\xi}\right)\left(\ln\xi / \ln\check{\xi}\right);\ \check{\xi} = K / 2q^2. \qquad (34)$$

При использовании во внешнем разложении условия скольжения выражение для скорости $w(\xi)$ принимает вид

$$w_c(\xi)/q^2/4 = \check{\xi} - \xi^2 + 2\check{\xi}^2 \ln\left(\xi/\check{\xi}\right). \qquad (35)$$

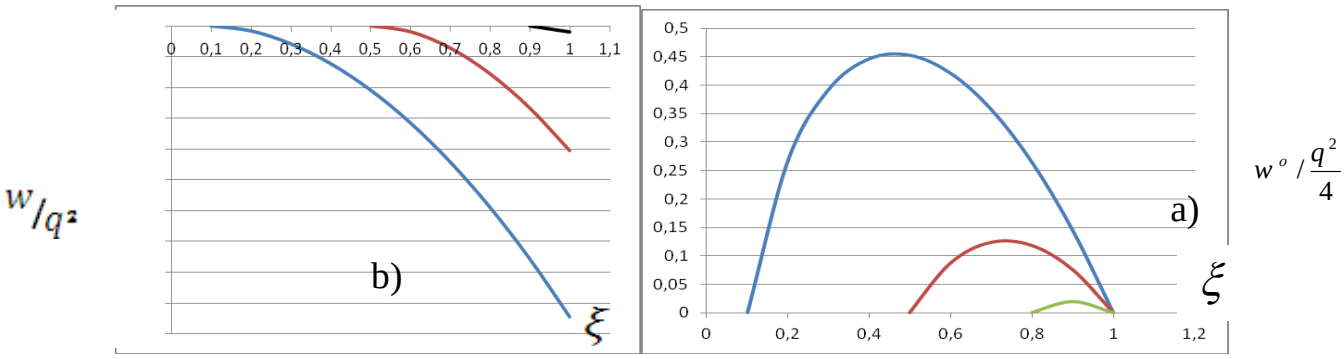


Рис. 6. Графики относительной скорости $w_c(\xi)/q^2/4$ течения МВПМ в кольцевом зазоре в случаях: а)прилипания материала к стенкам; b) скольжения материала вдоль внешней границы с наличием застойной зоны

Из сравнения характера течения в кольцевом зазоре МВПМ при прилипании к стенкам и при скольжении вдоль стенки следует вывод: при одинаковых параметрах μ, K, $\partial p/\partial z$, $\check{\xi}$ - расход МВПМ при прилипании к стенкам через поперечное сечение щели почти всегда меньше расхода МВПМ материала при условии скольжения (Рис. 7)

$$G_0 \big/ \pi q^2/2 = \frac{1}{4}\left(1-\check{\xi}^2\right)\left(-\frac{1-\check{\xi}}{\ln\check{\xi}}+1+\ln\check{\xi}\right); \qquad (36)$$

$$G_M \big/ \pi q^2/2 = \frac{1}{4}\left(1-\check{\xi}^2\right)\left(7\check{\xi}^2+6+4\ln\check{\xi}\right). \qquad (37)$$

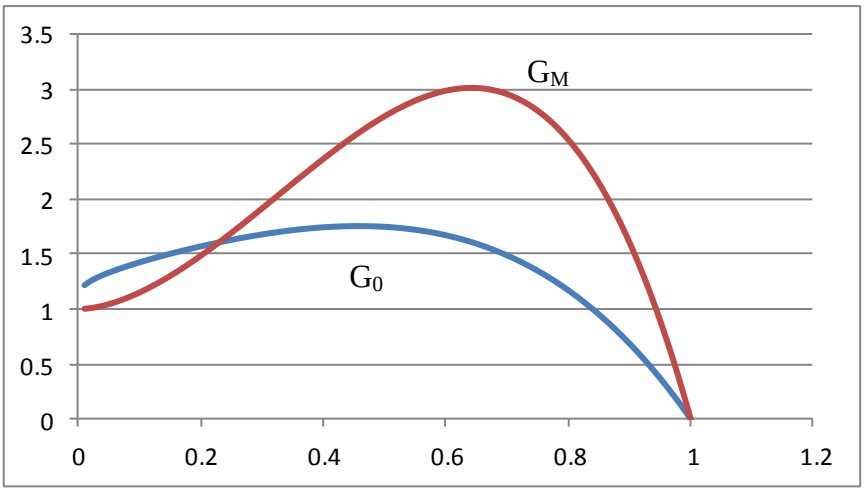
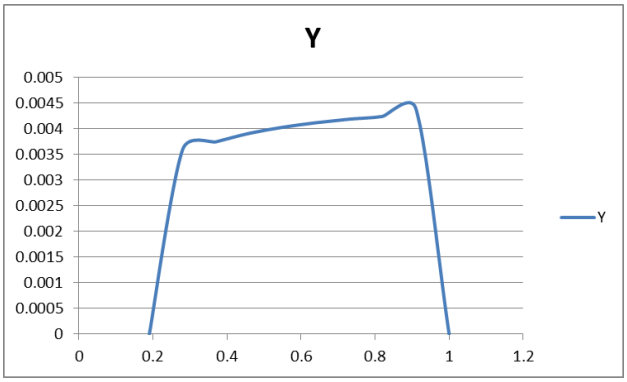
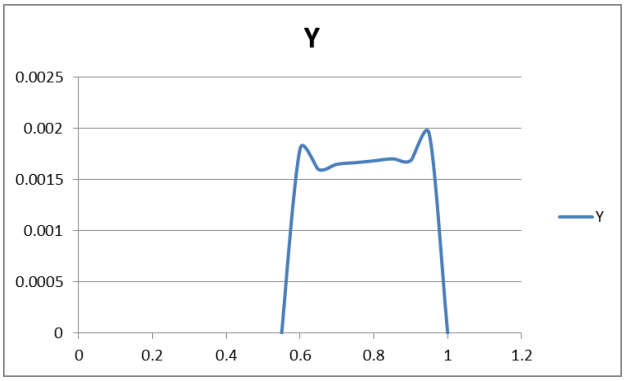


Рис. 7. Графики расхода материала при его продольном течении в цилиндрической цели в зависимости от внутреннего радиуса $\bar{\xi}$ щели в случаях: а) прилипания материала к стенкам; в) скольжения материала вдоль внешней границы.

В четвертой главе диссертации построены расчетные формулы дискретной аппроксимации дифференциальной задачи продольного течения МВПМ в цилиндрическом зазоре, построенные с использованием МКЭ с нелинейными базисными функциями. Программный комплекс реализующий компьютерную модель течения позволяет рассчитывать поле скоростей течения и объемный расход материала для различных значений параметров и различных случаев граничных условий – прилипания материала к стенкам или скольжения вдоль них. Программной комплекс написана на языке Visual Basic. Компьютерный расчёт скорости течения МВПМ (Рис. 8) демонстрирует качественное отличие от течения модели вязкой жидкости.



б=0.1 , N=10, X_o=0.1, δ=0,01 прилипание , расход атериала=0.0195819705466684



б=0.1 , N=10, X_o=0.5, δ=0.1 , γ=0.1 скольжение , расход материала=0.0159172070588687

Рис. 8. Графики поле скоростей продольного течения материала в цилиндрическом зазоре.

Приведенные на рис.8 графики показали отсутствие твердых зон в течении и градиентность течения вблизи границ.

В заключении приведены основные результаты диссертации выносимые на защиту:

1. Сформулирована полная вместе с граничными условиями математическая модель стационарного продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в трубах различного поперечного сечения. Граничные условия прилипания или скольжения материала на стенках имеют место для различных реальных материалов в зависимости от превалирования в них свойств вязкости или пластичности. Построенная математическая модель содержит производные четвертого порядка что потребовало увеличения числа граничных условий. Показано, что дополнительные граничные условия, обусловленные микроструктурой материала, выполняются автоматически при стремлении параметра микроструктура к нулю и тем самым имеет место асимптотический переход модели течения микроструктурного вязкопластического материала к классической идеальной модели течения вязкопластической жидкости.

2. Алгоритм построения и результаты анализа поля скоростей течения МВПМ в трубе эллиптического сечения основан на использовании метода малого параметра (методы возмущений) решения сингулярно возмущенных задач. Детальное исследование пограничного слоя показало возможность его аппроксимации и как в линейном, так и в нелинейном приближении, что позволяет провести сращивание решений внутреннего и внешнего приближений. Показано, что продольный градиент давления в трубе эллиптического сечения является не осесимметричной величиной с отклонением порядка эксцентриситета эллипса. Моделирование поля скоростей в цилиндрической трубе позволило выделить случаи: течение без образования жесткого ядра; неразрывного гладкого течения с выделением ядра течения; течение с ядром, которое проскальзывает относительно основного течения.

3. Программный комплекс, реализованный на основе алгоритма метода конечных элементов построения поля скоростей течения МВПМ в цилиндрическом зазоре позволяет выделять течение в пограничном слое и основной поток. Моделирование течения в кольцевом зазоре с условием прилипания материала к стенкам показало невозможность образования твердых зон.

4. Математическая и компьютерная модели течения микроструктурного вязкопластического материала допускают слабо слоистое поле скоростей, поперечный размер которых есть величина порядка относительного характерного параметра микроструктуры. Для случая внедрения молекул в углеродную трубку слой молекул можно модельно соотнести со слоем микроструктурного вязкопластического материала. Для переднего сечения микроструктурного вязкопластического материала, внедряющегося в углеродную трубку под действием поверхностного натяжения отмечен на модели факт более быстрого движения материала у стенки нанотрубки по сравнению со скоростью центральных слоев, что аналогично внедрению молекул в нанотрубку.

Публикации автора

Автором опубликовано 12 работ по теме диссертации.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Аль Имам А. А. Течение микроструктурного вязкопластического материала в кольцевом зазоре при условий качения представительного элемента на стенках/ А. А. Аль Имам // Вестник ВГУ. Серия физика математика. – 2015. - № 2. – С. 56-61.

2. Аль Имам Адель А. Абед Аль Вахаб Послойное течение микроструктурного материала в канале вблизи действия сил поверхностного натяжения / Адель А. Абед Аль Вахаб Аль Имам // Вестник чувашского государственного педагогического университета. им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. - № 3(21). – С. 144-148.

3. Аль Имам Адель А., Вервейко Н.Д. Особенности продольного течения вязкопластического материала с учетом его микроструктуры в кольцевом зазоре/ Адель А. Аль Имам,Н.Д. Вервейко// Вестник чувашского государственного педагогического университета. им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). – С.3 –11.

Публикации в других изданиях

4. Аль Имам А. А., Вервейко Н. Д., Ноаман С. А. МКЭ сквозного решения сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка без выделения пограничного соля / А. А. Аль Имам., Н.Д. Вервейко, С.А. Ноаман // Международный молодёжный симпозиум, «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения», г. Воронеж 18 – 19 ноября 2014 года. С. 134-137.

5. Аль Имам А. А. , Вервейко Н. Д. Применение Вейвлет – преобразования к решению задач течения материалов с учётом микроструктуры./ А. А. Аль Имам , Н. Д. Вервейко //(Воронеж)Сборник: Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики .

Сборник трудовмеждународной конференции. Воронеж 26-28 ноября 2012 г. :в 2 ч. Ч. 2. –Воронеж . С.2 .

6. Аль Имам А. А. МКЭ с нелинейными базисными функциями расчёта параметров течения микроструктурного вязкопластического материала/ А. А. Аль Имам, Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман //VIII Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела 16 июня – 21 июня 2014 г., Чебоксары, 265с. - С.11-15.

7. Аль Имам А. А. Течение микроструктурного вязкопластичного материала в плоской трубе в условиях прилипания и отсутствия микровращения представительного элемента / А. А. Аль Имам, С. А. Ноаман // IX международной научно-практической конференции «Инновации в науке: применение и результаты» (Россия, г. Новосибирск, 17-18.10.2014). С. 5-7.

8. Аль Имам А. Влияние микроструктуры вязкопластического материала на форму течения в круглой трубе / А. Аль Имам// Воронежский государственный университет. Материалы международной конференции ((Воронежская зимняя матемаическая школа С. Г. КРЕЙНА –2014)). –435С., С. 21–24.

9. Аль Имам А. Математическая модель механического капиллярного заполнения нанотрубок / А. Аль Имам // Воронежский государственный университет. Материалы международной конференции (Воронежская зимняя математическая школа –2014). С. 3-5.

10. Аль Имам А., Вервейко Н.Д., Шашкин А.И. Построение поля скоростей продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в трубе эллиптического сечения методом малого параметра/ А. Аль Имам, Н.Д. Вервейко, А.И. Шашкин // Сборник трудов международной конференции. «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». М. : Физматлит, 2015 г. С. 10-15.

11. Аль Имам Адель А. Абед Ал-Вахаб, Вервейко Н.Д. Асимптотический анализ продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в кольцевом зазоре/ Адель А. Абед Ал-Вахаб Аль Имам, Н.Д. Вервейко //(Воронеж).Сборник: Современные теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы (Понтрягинские чтения – XXIV) . Воронеж , 2013. – 246 с., С.229-230.

12. Аль Имам Адель А. Продольное течение вязкопластического микроструктурного материала в трубопроводах кругового поперечного сечения/ Адель А. Аль Имам// Вестник факультета прикладной математики информатики и механики. – Вып. 9, ч. II ; Воронежский государственный университет ; факультет прикладной, математики информатики и механики. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. – 224 с., С.3 – 9.